

Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 14 — $SU(2)$ -Invarianz

Betrachten Sie die $SU(2)$ -Gruppe der Spinrotationen, die durch den unitären Operator

$$U(\mathbf{a}) = \exp(i\mathbf{a}\mathbf{S})$$

beschrieben wird ($\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, \mathbf{S} Gesamtspin).

a) Berechnen Sie $[c_{i\sigma}, \mathbf{S}]_-$!

b) Zeigen Sie, dass man das Resultat kompakt als Gleichung für zweikomponentige "Spinoren" schreiben kann:

$$\left[\begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix}, S_{i\mu} \right]_- = \frac{1}{2} \sigma^{(\mu)} \begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix} \quad !$$

$\sigma^{(\mu)}$ ($\mu = x, y, z$) sind die Pauli-Matrizen.

c) Wie transformiert sich der Vernichter $\begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix}$ unter der $SU(2)$ -Transformation?

d) Zeigen Sie, dass der Hubbard-Hamilton-Operator $SU(2)$ -invariant ist, indem Sie ihn so umformen, dass die Invarianz offensichtlich wird!

Aufgabe 15 — Teilchen-Loch-Transformation

Für das Hubbard-Modell auf einer eindimensionalen Kette von Plätzen $j = 1, \dots, L$ mit geradem L sei der Operator

$$U = \prod_{j=1}^L \left(c_{j\uparrow} - (-1)^j c_{j\uparrow}^\dagger \right)$$

gegeben, wobei die Terme im Produkt nach aufsteigendem j angeordnet sind (der $j = L$ -Term steht ganz rechts).

a) Zeigen Sie, dass U unitär ist!

b) Zeigen Sie weiter, dass

$$U c_{j\uparrow} U^\dagger = (-1)^j c_{j\uparrow}^\dagger \quad !$$

U ist also die kombinierte Teilchen-Loch- und Vorzeichen-Transformation, unter der das Hubbard-Modell bei Halbfüllung invariant ist: $U H U^\dagger = H$.

c) Betrachten Sie jetzt den lokalen Spin

$$\mathbf{S}_j = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} c_{j\sigma}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_{\sigma\sigma'} c_{j\sigma'}$$

und definieren Sie

$$\mathbf{T}_j = U \mathbf{S}_j U^\dagger .$$

Zeigen Sie, dass \mathbf{T}_j einen Spin darstellt, d.h. begründen Sie, dass die entsprechenden Vertauschungsrelationen erfüllt sind! \mathbf{T}_j ist ein "Isospin".

d) Berechnen Sie T_{jz}, T_{jx}, T_{jy} !

e) Begründen Sie, dass sämtliche Komponenten von Spin und Isospin kommutieren!

f) Zeigen Sie, dass der Gesamt-Isospin $\mathbf{T} = \sum_j \mathbf{T}_j$ eine Erhaltungsgröße ist!

g) Begründen Sie, dass das Hubbard-Modell auf einem bipartiten Gitter bei Halbfüllung $SU(2) \times SU(2)$ -symmetrisch ist!