Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 11 — Coulomb-Wechselwirkung im reziproken Raum
Gegeben ist der folgende Hamilton-Operator in zweiter Quantisierung:

$$H = \sum_{ij\sigma} t_{ij} c^\dagger_{i\sigma} c_{j\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \sum_{\sigma\sigma'} U_{ijkl} c^\dagger_{i\sigma} c^\dagger_{j\sigma'} c_{l\sigma'} c_{k\sigma}$$

mit

$$t_{ij} = \langle i\sigma | H_1 | j\sigma \rangle \qquad U_{ijkl} = \langle i\sigma, j\sigma' | H_2 | k\sigma, l\sigma' \rangle$$

wobei i die Plätze eines Gitters bezeichnet.

Führen Sie die Fourier-Transformation in den reziproken Raum durch, und geben Sie den Hamilton-Operator in zweiter Quantisierung bezüglich der ONB $\{|\boldsymbol{k}\sigma\rangle\}$ an! Welche Vereinfachungen ergeben sich durch die Translationsinvarianz?

Leiten Sie die Form der Wechselwirkungsparameter im $\boldsymbol{k}$-Raum her für den Spezialfall

$$U_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{il} U \ ,$$

also für eine rein lokale Wechselwirkung!

Aufgabe 12 — Zeitabhängiger Vernichter
Beweisen Sie (durch Taylor-Entwicklung von $f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$ um $\lambda = 0$), dass

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = e^{-\lambda L_A} B$$

für zwei beliebige lineare Operatoren A, B, für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $L_A(X) = [X, A]_-$!

Nutzen Sie dieses Resultat, um die Zeitabhängigkeit des Vernichters $c_\alpha(t)$ im Heisenberg-Bild zu berechnen. Nehmen Sie dazu an, dass der Hamilton-Operator ein Ein-Teilchen-Operator ist:

$$H = \sum_m \varepsilon_m c^\dagger_m c_m \ .$$

Gibt es hier Unterschiede zwischen Fermionen und Bosonen?

Aufgabe 13 — Trotter-Zerlegung
Zeigen Sie die Gültigkeit der Trotter-Zerlegung

$$\exp(x(A+B)) = \exp(xA)\exp(xB) + \mathcal{O}(x^2)$$

für beliebige lineare Operatoren A und B! x ist eine reelle Zahl.