Übungen zur Vielteilchentheorie

Aufgabe 32 — Matsubara-Frequenzen

Zeigen Sie, dass die Fermi-Funktion / Bose-Funktion

$$\frac{1}{e^{\beta\omega} - \varepsilon}$$

für komplexe Frequenzen eine analytische Funktion ist bis auf Polstellen erster Ordnung an den fermionischen / bosonischen Matsubara-Frequenzen! Bestimmen Sie die Residuen!

Aufgabe 33 — Matsubara-Summen

Es sei $F(\omega)$ eine analytische Funktion bis auf Pole erster Ordnung auf der reellen ω-Achse, die für große $|\omega|$ schneller als $1/|\omega|$ gegen Null geht. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{\beta}\sum_n F(i\omega_n) = \frac{\varepsilon}{2\pi i}\oint_C d\omega \frac{1}{e^{\beta\omega} - \varepsilon} F(\omega) \ ,$$

wobei C ein Weg ist, der jede Matsubara-Frequenz gegen den Uhrzeigersinn genau einmal umläuft.

Aufgabe 34 — Ein-Teilchen-Korrelationsfunktion

Begründen Sie, dass die Matsubara-Summe

$$\frac{1}{\beta}\sum_n e^{i\omega_n 0^+} G_{\alpha\beta}(\omega)$$

für endliches (aber infinitesimales) 0^+ wohldefniert ist, und berechnen Sie die Summe durch Integration in der komplexen Ebene (s.o.) mit anschließender geeigneter Deformation des Integrationswegs, um zu zeigen, dass

$$\frac{1}{\beta}\sum_n e^{i\omega_n 0^+} G_{\alpha\beta}(\omega) = -\varepsilon \langle c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle \qquad !$$

Aufgabe 35 — Stoner-Modell

Betrachten Sie einen ferromagnetischen Zustand, der durch translationsinvariante und kollineare spontane Ordnung der lokalen magnetischen Momente in z-Richtung gekennzeichnet ist: $\langle \boldsymbol{S}_i \rangle = \langle \boldsymbol{S}_j \rangle \propto \boldsymbol{e}_z$.

Zeigen Sie für diesen Fall, dass die Hartree-Fock-Näherung für das Hubbard-Modell auf das folgende Referenzsystem führt:

$$H_{\text{Stoner}} = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} (\varepsilon(\boldsymbol{k}) + \frac{U}{2}(n - z_\sigma m)) c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma} = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} \widetilde{\varepsilon}_\sigma(\boldsymbol{k}) c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma}\,!$$

Hier ist n die Elektronendichte und m die (dimensionslose) Magnetisierung:

$$n = n_\uparrow + n_\downarrow, \qquad m = n_\uparrow - n_\downarrow, \qquad n_\sigma = \langle n_{i\sigma} \rangle, \qquad z_\uparrow = +1, \quad z_\downarrow = -1,$$

und $\varepsilon(\boldsymbol{k})$ die Dispersion, die sich durch Fourier-Transformation des Hoppings ergibt.

Stellen Sie eine Bestimmungsgleichung für den spinabhängigen Erwartungswert n_σ auf, und leiten Sie für festes n die folgende Bestimmungsgleichung für m ab:

$$m = \int dz \rho_0(z) \frac{\sinh(\beta U m/2)}{\cosh(\beta(z - \mu + Un/2)) + \cosh(\beta U m/2)}\,,$$

wobei $\rho_0(z) = \dfrac{1}{L} \sum_{\boldsymbol{k}} \delta(z - \varepsilon(\boldsymbol{k}))$ die freie Zustandsdichte definiert!

Zeigen Sie, dass $m = 0$ und dass mit m auch $-m$ eine Lösung ist, und diskutieren Sie den Fall $T \to \infty$!

Für $T \to T_C$, $T < T_C$ (T_C: Curie-Temperatur) ist $m \to 0$ ($m \neq 0$). Zeigen Sie, dass dann ($\beta_C = 1/T_C$):

$$1 = \frac{\beta_C U}{2} \int dz \rho_0(z) \frac{1}{\cosh(\beta_C(z - \mu + Un/2)) + 1}\,!$$

Leiten Sie für den Grenzfall $T_C = 0$ das sogenannte Stoner-Kriterium ab:

$$U \rho_0(\varepsilon_F^{(0)}) = 1\,!$$

Hier ist $\varepsilon_F = \mu(T = 0)$ und $\varepsilon_F = \varepsilon_F^{(0)} + Un/2$.