

## Übungen zur Vielteilchentheorie

### Aufgabe 28 — Homogenität der Green-Funktion

Zeigen Sie, dass

$$G_{AB}^{(\text{ret})}(t, t') = G_{AB}^{(\text{ret})}(t - t') ,$$

für ein System mit nicht explizit zeitabhängigem Hamilton-Operator!

### Aufgabe 29 — Spektraltheorem

Betrachten Sie ein freies, spinloses Teilchen in einer Dimension:

$$H = \frac{p^2}{2m} , \quad [x, p]_- = i .$$

Der (gemischte) Zustand des Systems sei durch  $\rho = \exp(-\beta H)/Z$  mit  $Z = \text{Sp} \exp(-\beta H)$  gegeben.

a) Zeigen Sie durch eine explizite Rechnung, dass

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} T$$

und begründen Sie das Ergebnis!

b)  $\langle H \rangle$  soll jetzt aus der Kommutator-Green-Funktion  $G^{(+)}(\omega) = \langle \langle p; p \rangle \rangle^{(+)}$  berechnet werden. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für  $G^{(+)}(\omega)$ ! (Das Ergebnis ist trivial).

c) Versuchen Sie, den Erwartungswert  $\langle H \rangle = \langle p \cdot p \rangle / 2m$  aus dem Spektraltheorem zu bestimmen. Beachten Sie dabei die Konstante  $D$  (s. Vorlesung)!

d) Begründen Sie die Beziehung

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega G^{(-)}(\omega) = 2D ,$$

und berechnen Sie so die Konstante  $D$  aus der Antikommutator-Green-Funktion  $G^{(-)}(\omega) = \langle \langle p; p \rangle \rangle^{(-)}$ ! Gelingt die Bestimmung von  $\langle H \rangle$ ?

e) Es sei nun ein infinitesimales, symmetriebrechendes Feld durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \eta^2 x^2 \quad \text{mit } \eta \rightarrow 0$$

eingeführt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Kommutator-Green-Funktion  $\langle\langle p; p \rangle\rangle^{(+)}$  auf und lösen Sie diese für  $\eta \neq 0$ ! (Dazu ist auch  $\langle\langle x; p \rangle\rangle^{(+)}$  zu bestimmen).

f) Bestimmen Sie die Konstante  $D$ !

g) Berechnen Sie  $\langle H \rangle_\eta$  aus dem Spektraltheorem für  $G^{(+)}(\omega)$  für  $\eta \neq 0$ !

h) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \langle H \rangle_\eta = \frac{1}{2} T !$$