

Übungen zur Vielteilchentheorie

Aufgabe 28 — Homogenität der Green-Funktion

Zeigen Sie, dass

$$G_{AB}^{(\text{ret})}(t, t') = G_{AB}^{(\text{ret})}(t - t') ,$$

für ein System mit nicht explizit zeitabhängigem Hamilton-Operator!

Aufgabe 29 — Spektraltheorem

Betrachten Sie ein freies, spinloses Teilchen in einer Dimension:

$$H = \frac{p^2}{2m} , \quad [x, p]_- = i .$$

Der (gemischte) Zustand des Systems sei durch $\rho = \exp(-\beta H)/Z$ mit $Z = \text{Sp} \exp(-\beta H)$ gegeben.

a) Zeigen Sie durch eine explizite Rechnung, dass

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} T$$

und begründen Sie das Ergebnis!

b) $\langle H \rangle$ soll jetzt aus der Kommutator-Green-Funktion $G^{(+)}(\omega) = \langle \langle p; p \rangle \rangle^{(+)}$ berechnet werden. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $G^{(+)}(\omega)$! (Das Ergebnis ist trivial).

c) Versuchen Sie, den Erwartungswert $\langle H \rangle = \langle p \cdot p \rangle / 2m$ aus dem Spektraltheorem zu bestimmen. Beachten Sie dabei die Konstante D (s. Vorlesung)!

d) Begründen Sie die Beziehung

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega G^{(-)}(\omega) = 2D ,$$

und berechnen Sie so die Konstante D aus der Antikommutator-Green-Funktion $G^{(-)}(\omega) = \langle \langle p; p \rangle \rangle^{(-)}$! Gelingt die Bestimmung von $\langle H \rangle$?

e) Es sei nun ein infinitesimales, symmetriebrechendes Feld durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \eta^2 x^2 \quad \text{mit } \eta \rightarrow 0$$

eingeführt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Kommutator-Green-Funktion $\langle\langle p; p \rangle\rangle^{(+)}$ auf und lösen Sie diese für $\eta \neq 0$! (Dazu ist auch $\langle\langle x; p \rangle\rangle^{(+)}$ zu bestimmen).

f) Bestimmen Sie die Konstante D !

g) Berechnen Sie $\langle H \rangle_\eta$ aus dem Spektraltheorem für $G^{(+)}(\omega)$ für $\eta \neq 0$!

h) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \langle H \rangle_\eta = \frac{1}{2} T !$$