Übungen zur Vielteilchentheorie

Aufgabe 26 — $T = 0$-Spektraldichte

a) Zeigen Sie mit Hilfe der allgemeinen Lehmann-Darstellung, dass die Spektraldichte für $T = 0$ als

$$S_{AB}(\omega) = \langle 0|A\delta(\omega - (\mathcal{H} - E_0))B|0\rangle \pm \langle 0|B\delta(\omega - (E_0 - \mathcal{H}))A|0\rangle$$

geschrieben werden kann, und interpretieren Sie diesen Ausdruck!

b) Berechnen Sie die Spektraldichte $S_{AB}(\omega)$ für den Fall, dass $[A, \mathcal{H}]_- = 0$!

c) Nehmen Sie an, dass

$$S_{AB}(\omega) = z_0\delta(\omega - \omega_0)$$

mit reellen Konstanten z_0, ω_0 in einer Umgebung von ω_0, und begründen Sie für diesen Fall mit Hilfe von a), dass die zugehörige Anregung eine unendlich lange Lebensdauer besitzt! Ist dies für wechselwirkende Systeme ein typischer Fall?

Aufgabe 27 — Funkionalintegraldarstellung der Zustandssumme

a) Zeigen Sie für die Zustandssumme eines Bosesystems, dass

$$Z = \text{Sp}\, e^{-\beta\mathcal{H}} = \lim_{M\to\infty} (\mathcal{T} e^{-\varepsilon\mathcal{H}})^M \qquad (\varepsilon = \beta/M)$$

wobei $\mathcal{T}$ der Zeitordnungsoperator ist. Für Operatoren ohne Zeitabhängigkeit ordnet $\mathcal{T}$ Erzeuger stets links von Vernichtern an: $\mathcal{T}(c_\alpha c_\beta^\dagger) = +c_\beta^\dagger c_\alpha$ (Bosonen).

b) Zeigen Sie jetzt, dass

$$Z = \lim_{M\to\infty} \int \left(\prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_\alpha dy_\alpha}{\pi}\right) e^{-\sum_\alpha \varphi_\alpha^* \varphi_\alpha} \langle \varphi_1, ..., \varphi_d|(\mathcal{T} e^{-\varepsilon\mathcal{H}})^M|\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle$$

bzw. nach trivialer Ergänzung des Index M:

$$Z = \lim_{M\to\infty} \int \left(\prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_{\alpha,M} dy_{\alpha,M}}{\pi}\right) e^{-\sum_\alpha \varphi_{\alpha,M}^* \varphi_{\alpha,M}} \langle \varphi_{1,M}, ..., \varphi_{d,M}|(\mathcal{T} e^{-\varepsilon\mathcal{H}})^M|\varphi_{1,M}, ..., \varphi_{d,M}\rangle$$

c) Schreiben Sie die Potenz aus, und fügen Sie $M - 1$-mal die $\mathbf{1}$ ein,

$$(\mathcal{T} e^{-\varepsilon\mathcal{H}})^M = \mathcal{T} e^{-\varepsilon\mathcal{H}} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathcal{T} e^{-\varepsilon\mathcal{H}} \cdot \mathbf{1} \cdots \mathbf{1} \cdot \mathcal{T} e^{-\varepsilon\mathcal{H}}\,,$$

wobei die r-te Eins ($r = 1, ..., M - 1$) durch kohärente Zustande $|\varphi_{1r}, ..., \varphi_{dr}\rangle$ dargestellt wird! Zeigen Sie damit, dass

$$Z \;=\; \lim_{M\to\infty} \int \left(\prod_{r=1}^{M}\prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_{\alpha,r} dy_{\alpha,r}}{\pi}\right) \times$$

$$\left(\prod_{r=1}^{M} e^{-\sum_\alpha \varphi^*_{\alpha,r}\varphi_{\alpha,r}}\langle\varphi_{1,r},...,\varphi_{d,r}|(\mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}})|\varphi_{1,r-1},...,\varphi_{d,r-1}\rangle\right) ,$$

wobei $\varphi_{\alpha,0} \equiv \varphi_{\alpha,M}$ definiert wird ("periodische Randbedingungen")!

d) Der Hamilton-Operator sei wie üblich durch

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha\beta}(t_{\alpha\beta} - \mu\delta_{\alpha\beta})c^\dagger_\alpha c_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\delta\gamma}c^\dagger_\alpha c^\dagger_\beta c_\gamma c_\delta$$

gegeben, also eine Funktion $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{c^\dagger_\alpha, c_\alpha\})$ aller Erzeuger und Vernichter. Zeigen Sie, dass

$$\langle\varphi_{1,r},...,\varphi_{d,r}|(\mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}(\{c^\dagger_\alpha,c_\alpha\})})|\varphi_{1,r-1},...,\varphi_{d,r-1}\rangle = e^{-\varepsilon\mathcal{H}(\{\varphi^*_{\alpha,r},\varphi_{\alpha,r-1}\})}e^{\sum_\alpha \varphi^*_{\alpha,r}\varphi_{\alpha,r-1}}$$

unter Benutzung der Formel für das Skalarprodukt kohärenter Zustände!

e) Beweisen Sie jetzt:

$$\begin{aligned} Z &= \lim_{M\to\infty}\int\left(\prod_{r=1}^{M}\prod_{\alpha=1}^{d}\frac{dx_{\alpha,r}dy_{\alpha,r}}{\pi}\right)\times \\ &\quad \exp\left(-\sum_r\sum_\alpha \varphi^*_{\alpha,r}(\varphi_{\alpha,r} - \varphi_{\alpha,r-1}) - \varepsilon\sum_r \mathcal{H}(\{\varphi^*_{\alpha,r},\varphi_{\alpha,r-1}\})\right) \end{aligned}$$

f) Führen Sie (im Limes $M \to \infty$) die folgenden Notationen ein:

$$\begin{aligned} \tau_r &= \varepsilon r = \frac{\beta}{M}r \\ \varphi_\alpha(\tau_r) &= \varphi_{\alpha,r} \\ \frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_\alpha(\tau_r) &= \frac{\varphi_{\alpha,r} - \varphi_{\alpha,r-1}}{\varepsilon} \\ D[\varphi^*_\alpha(\tau),\varphi_\alpha(\tau)] &= \prod_{r=1}^{M}\prod_{\alpha=1}^{d}\frac{dx_{\alpha,r}dy_{\alpha,r}}{\pi} \end{aligned}$$

und zeigen Sie damit die Funktionalintegraldarstellung von Z:

$$Z = \int D[\varphi^*_\alpha(\tau),\varphi_\alpha(\tau)]e^{-S(\{\varphi^*_\alpha(\tau),\varphi_\alpha(\tau)\})}$$

mit der Wirkung

$$S = \int_0^\beta d\tau\left(\sum_\alpha \varphi^*_\alpha(\tau)(\partial/\partial\tau)\varphi_\alpha(\tau) + \mathcal{H}(\{\varphi^*_\alpha(\tau),\varphi_\alpha(\tau)\})\right)$$