Übungen zur Vielteilchentheorie

Aufgabe 12 — Zeitabhängiger Vernichter

Beweisen Sie (durch Taylor-Entwicklung von $f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$ um $\lambda = 0$), dass

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = e^{-\lambda L_A} B$$

für zwei beliebige lineare Operatoren A, B, für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $L_A(X) = [X, A]_-$!

Nutzen Sie dieses Resultat, um die Zeitabhängigkeit des Vernichters $c_\alpha(t)$ im Heisenberg-Bild zu berechnen. Nehmen Sie dazu an, dass der Hamilton-Operator ein Ein-Teilchen-Operator ist:

$$H = \sum_m \varepsilon_m c_m^\dagger c_m \, .$$

Gibt es hier Unterschiede zwischen Fermionen und Bosonen?

Aufgabe 13 — Trotter-Zerlegung

Zeigen Sie die Gültigkeit der Trotter-Zerlegung

$$\exp(x(A+B)) = \exp(xA)\exp(xB) + \mathcal{O}(x^2)$$

für beliebige lineare Operatoren A und B! x ist eine reelle Zahl.

Aufgabe 14 — Ω konkav

Es sei $H = H_0 + \lambda A$ mit H_0 und A hermitesch aber sonst beliebig. Es gilt mit $\beta = 1/T, A(\tau) = e^{\mathcal{H}\tau} A e^{-\mathcal{H}\tau}, \mathcal{H} = H - \mu\hat{N}, \Omega = -T \ln \mathrm{Sp}\, e^{-\beta\mathcal{H}}$:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} = \beta \langle A \rangle^2 - \int_0^\beta d\tau \langle A(\tau) A(0) \rangle = \frac{\partial \langle A \rangle}{\partial \lambda} \qquad \text{(s. Vorlesung)}$$

Zeigen Sie damit, dass $\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} \leq 0$!

Anleitung: Nutzen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für ein geeignet definiertes Skalarprodukt aus!

Aufgabe 15 — Teilchenzahlerhaltung

Zeigen Sie, dass die (Gesamt-)Teilchenzahl für einen allgemeinen Hamilton-Operator der Form

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger c_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta} c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma$$

mit beliebigen Matrixelementen $t_{\alpha\beta}$ und $U_{\alpha\beta\delta\gamma}$ eine Erhaltungsgröße ist!