Übungen zur Vielteilchentheorie

Aufgabe 7 — Kommutatoren mit dem Besetzungszahloperator
Begründen Sie, dass die Kommutatorrelation

$$[c_\alpha, \widehat{n_\beta}]_- = \delta_{\alpha\beta} c_\alpha$$

sowohl für Bosonen als auch für Fermionen gilt!

Aufgabe 8 — Darstellung von Observablen
Gehen Sie analog zu der in der Vorlesung vorgestellten Argumentation für den Ein-Teilchen-Anteil einer Observablen vor, und leiten Sie so die folgende allgemeine Darstellung für den Zwei-Teilchen-Anteil her:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1,\dots,N}^{i\neq j} A_2^{(i,j)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \phi_\alpha \phi_\beta | A_2 | \phi_\gamma \phi_\delta \rangle \; c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma \qquad !$$

Aufgabe 9 — Doppelbesetzung
Zeigen Sie für Spin-1/2-Fermionen ($\varepsilon = -1$), dass

$$0 \leq \langle d_i \rangle \leq 1$$

wobei $d_i = \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow}$ die Doppelbesetzung bezeichnet.

Aufgabe 10 — lokaler Spin
Für ein Gittermodell sei die Orthonormalbasis des Ein-Teilchen-Hilbert-Raums durch $\{|i\sigma\rangle\}$ gegeben, wobei i die Plätze eines Gitters indiziert und $\sigma = \uparrow, \downarrow$.
a) Verifizieren Sie für die Observable "lokaler Spin" $\boldsymbol{S}_{i\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} c_{i\sigma}^\dagger \sigma_{\sigma\sigma'}^{(\mu)} c_{i\sigma'}$ (mit $\mu = x, y, z$ und $\sigma^{(\mu)}$: Pauli-Matrizen) die Drehimpulsalgebra

$$[S_{ix}, S_{iy}]_- = i S_{iz} \qquad \text{(und zyklische Vertauschungen)} \quad !$$

b) Berechnen Sie $\boldsymbol{S}_i^2$!

Aufgabe 11 — Gesamtspin
Für ein fermionisches Gittermodell sei die Orthonormalbasis des Ein-Teilchen-Hilbert-Raums durch $\{|i\sigma\rangle\}$ gegeben, wobei $i = 1, ..., L$ die Plätze eines Gitters indiziert und $\sigma = \uparrow, \downarrow$.

Zeigen Sie, dass für den Gesamtspin von N Teilchen gilt:

$$\boldsymbol{S} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{S}^{(j)} = \sum_{i=1}^{L} \boldsymbol{S}_i \qquad !$$

L ist die Anzahl der Gitterplätze, $\boldsymbol{S}^{(j)}$ der Spin des j-ten Teilchens und $\boldsymbol{S}_i$ der lokale Spin am i-ten Platz.