Übungen zur Vielteilchentheorie

Aufgabe 1 — Mischung vs. Superposition von Zuständen

Diskutieren Sie den Unterschied zwischen einer "inkohärenten" Mischung und einer "kohärenten" linearen Superposition zweier reiner Zustände, und betrachten Sie dazu die Basiszustände eines zweidimensionalen Hilbert-Raums $|\uparrow\rangle = (1,0)^T$ und $|\downarrow\rangle = (0,1)^T$ und

$$\rho = |\alpha|^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1,0) + |\beta|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0,1) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

a) Beschreibt ρ tatsächlich einen gemischten Zustand?
b) Zeigen Sie, dass es einen messbaren Unterschied zwischen ρ und $|\Psi\rangle$ gibt!
c) Vergleichen Sie ρ mit dem Dichteoperator des reinen Zustands!
d) Für welches α wird die Shannon-Information maximal?

Aufgabe 2 — Purifikation eines gemischten Zustands

Gegeben sei ein gemischter Zustand mit Dichteoperator

$$\rho = \sum_k p_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k| \ .$$

ρ ist ein Operator auf dem Hilbert-Raum des "Systems" $\mathcal{H}$ mit ONB $\{|\phi_k\rangle\}$. Es sei $\mathcal{H}'$ eine "Kopie" von $\mathcal{H}$, also ein zu $\mathcal{H}$ isomorpher Hilbert-Raum einer "Umgebung" mit ONB $\{|\phi'_k\rangle\}$.

Konstruieren Sie einen reinen Zustand (vom System inklusive Umgebung)

$$|\Psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$$

so dass sich durch Ausführen der partiellen Spur in $\mathcal{H}'$ der gemischte Zustand des Systems ergibt:

$$\rho = \mathsf{Sp}\,'|\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_k \langle\phi'_k|\Psi\rangle\langle\Psi|\phi'_k\rangle \quad !$$

Aufgabe 3 — (Anti-)Symmetrisierungsoperator
Beweisen Sie die Eigenschaften

- $\mathcal{P} S_N^{(\epsilon)} = \epsilon^{\mathcal{P}} S_N^{(\epsilon)}$
- $(S_N^{(\epsilon)})^2 = S_N^{(\epsilon)}$ (Idempotenz)
- $(S_N^{(\epsilon)})^\dagger = S_N^{(\epsilon)}$ (Hermitizität)
- $S_N^{(+)} S_N^{(-)} = S_N^{(-)} S_N^{(+)} = 0$

des (Anti-)Symmetrisierungsoperators $S_N^{(\epsilon)} = \dfrac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}} \epsilon^{\mathcal{P}} \mathcal{P}$

($\epsilon = +1$ für Bosonen, $\epsilon = -1$ für Fermionen)!

Zeigen Sie, dass $S_N^{(0)} = \mathbf{1} - S_N^{(+)} - S_N^{(-)}$ ein zu $S_N^{(\epsilon)}$ orthogonaler Projektor ist!

Aufgabe 4 — Quantenstatistischer Erwartungswert
Es sei

$$H = H_0 + \lambda A$$

mit einem hermiteschen Operator A, der nicht notwendigerweise mit dem Hamilton-Operator kommutiert.

Zeigen Sie, dass

$$\langle A \rangle = \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} k_B T \ln \mathsf{Sp}\, e^{-\beta(H - \mu N)} \quad !$$

Aufgabe 5 — Darstellung von Basiszuständen
Zeigen Sie:

$$|N; n_1, n_2, \cdots, n_\alpha, \cdots \rangle^{(\varepsilon)} = \left(\frac{(c_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(c_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \cdots \frac{(c_\alpha^\dagger)^{n_\alpha}}{\sqrt{n_\alpha!}} \cdots \right) |0\rangle \qquad !$$

Aufgabe 6 — Fundamentale (Anti-)Vertauschungsrelationen
Beweisen Sie die folgenden Antikommutatorrelationen für ein System von identischen Fermionen ($[A, B]_+ = AB + BA$):

$$[c_\alpha, c_\beta]_+ = 0 \qquad , \qquad [c_\alpha^\dagger, c_\beta^\dagger]_+ = 0 \qquad , \qquad [c_\alpha, c_\beta^\dagger]_+ = \delta_{\alpha\beta} \qquad !$$